

Analyse complexe

**L3 MAF**

**2015-2016**



# Chapitre 1

## Définition et caractérisation.

Dans ce chapitre nous considérons des fonctions définies sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

### 1.1 Rappel sur les nombres complexes

### 1.2 Définition

Définition—Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  une partie ouverte du plan complexe et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction complexe. On dit que  $f$  est holomorphe si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point, c'est-à-dire si la limite

$$f'(z) = \lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe en tout point  $z \in \Omega$ .

Conformément à l'usage courant, l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$  sera noté  $\mathcal{O}(\Omega)$ . Si  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , la dérivée de  $f$  sera notée indifféremment

$$f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

Comme l'existence d'une dérivée implique automatiquement la continuité, on a  $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ , où  $\mathcal{C}^0(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions continues  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

Propriétés élémentaires. Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Alors

$$(2.1.1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

$$(2.1.2) \quad fg \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } (fg)' = f'g + fg'.$$

$$(2.1.3) \quad \frac{f}{g} \in \mathcal{O}(\Omega \setminus g^{-1}(0)) \text{ et } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

$$(2.1.4) \quad \text{Si } f(\Omega) \text{ est contenu dans un ouvert } \Omega' \text{ et si } h \in \mathcal{O}(\Omega'), \text{ alors } h \circ f \in \mathcal{O}(\Omega) \\ \text{et } (h \circ f)' = (h' \circ f) f'.$$

(2.1.5) Si  $f' = 0$ , alors  $f$  est constante sur chaque composante connexe de  $\Omega$ .

*Démonstration.* La démonstration de ces propriétés est presque entièrement analogue à celle des propriétés correspondantes pour les fonctions réelles d'une variable réelle, nous omettrons donc les détails. En ce qui concerne (2.1.5), on peut supposer  $\Omega$  connexe. Alors deux points quelconques de  $\Omega$  peuvent être joints par un chemin polygonal tracé dans  $\Omega$ , et il suffit donc de montrer que  $f(a) = f(b)$  pour tout segment  $[a, b] \subset \Omega$ . Or ceci résulte du fait que la fonction de variable réelle  $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$  a une dérivée  $\varphi'(t) = (b - a)f'(a + t(b - a))$  nulle pour tout  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

Il résulte en particulier des propriétés (2.1.2), (2.1.3) que l'ensemble des fonctions holomorphes  $(\mathcal{O}(\Omega), +, \times, \cdot)$  a une structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre pour les lois usuelles d'addition, de multiplication et de produit d'une fonction par un scalaire complexe.

Fonctions entières. *On appelle fonctions entières les fonctions qui sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$  tout entier, c'est-à-dire les fonctions de  $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ .*

Exemples. Les fonctions polynômes  $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$  définissent des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  tout entier.

Contre-exemples. Il n'est pas très difficile de trouver des exemples de fonctions non holomorphes, on peut même en donner qui soient indéfiniment différentiables au sens réel. Ainsi la fonction  $f(z) = \bar{z}$  n'admet nulle part de dérivée complexe, puisque la limite

$$\lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\mathbb{C}^* \ni h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

n'existe pas (si on pose  $h = \rho e^{i\theta}$ , alors  $\bar{h}/h = e^{-i\theta}/e^{i\theta} = e^{-2i\theta}$  admet des limites différentes suivant chacune des demi-droites issues de l'origine). On vérifiera de même que la fonction  $f(z) = |z|^2$  n'admet pas de dérivée complexe, sauf au point  $z = 0$  en lequel la dérivée est nulle.

## 1.3 2.2. Rappels sur la notion de différentiabilité

Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Étant donné un ouvert  $\Omega$  dans  $E$ , rappelons qu'une application  $f : \Omega \rightarrow F$  est dite  $\mathbb{K}$ -différentiable en un point  $x \in \Omega$  s'il existe une application  $\mathbb{K}$ -linéaire  $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  et une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V$  de l'origine dans  $E$ , telles que pour  $h$  dans  $V$  on ait

$$(2.2.1) \quad f(x+h) = f(x) + \ell(h) + \|h\|\varepsilon(h),$$

avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  ( $\|\cdot\|$  désigne ici une norme quelconque sur  $E$  ; par ailleurs, l'adjectif différentiable utilisé seul fera toujours référence à la  $\mathbb{R}$ -différentiabilité, si le corps de base n'est pas précisé). L'application linéaire  $\ell$  s'appelle *différentielle* de  $f$  au point  $x$  et elle est notée  $\ell = df_x$ . Rappelons par ailleurs les conventions de notations usuelles concernant les  $O$  et  $o$ , dites conventions de Landau : si  $h \mapsto \eta(h)$  est une fonction arbitraire, on écrit

$$\eta(h) = O(\|h\|^p) \iff \exists C > 0, \quad \|\eta(h)\| \leq C\|h\|^p,$$

$$\eta(h) = o(\|h\|^p) \iff \exists \varepsilon, \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ et } \|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h) \|h\|^p.$$

La formule (2.2.1) peut alors se récrire sous la forme

$$(2.2.2) \quad f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Si  $f$  est différentiable sur  $\Omega$ , on note  $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ ,  $x \mapsto df_x$ , l'application différentielle de  $f$ . Étant donné une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  et  $h = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j e_j \in E$ , une application linéaire  $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$  s'exprime de manière unique sous la forme

$$(2.2.3) \quad \ell(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j v_j, \quad v_j \in F,$$

avec des vecteurs  $v_j = \ell(e_j)$  quelconques. En particulier, la différentielle  $df$  s'écrit

$$(2.2.4) \quad df_x(h) = \sum_{1 \leq j \leq n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \forall h = \sum h_j e_j,$$

où  $\partial f / \partial x_j = df_x(e_j) \in F$  est la dérivée partielle de  $f$  dans la direction  $e_j$ . Si  $f$  est linéaire, il est clair que  $f$  admet une différentielle en tout point et que sa différentielle coïncide avec  $f$ . Les fonctions coordonnées  $x_j$ , vues comme des fonctions  $E \rightarrow \mathbb{K}$ , admettent elles-mêmes des différentielles  $dx_j$  telles que  $dx_j(h) = h_j$ . L'identité (2.2.3) devient alors

$$(2.2.5) \quad \ell = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot v_j = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \cdot \ell(e_j)$$

et, en particulier,  $(dx_1, \dots, dx_n)$  est une base du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ . Ceci nous permet d'exprimer la différentielle  $df$  sous la forme plus familière

$$(2.2.6) \quad df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

## 1.4 Fonctions holomorphes

### 1.4.1 Définition

Soit  $U \subset \mathbf{C}$  un ouvert.  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  est holomorphe si  $f$  est  $\mathbf{C}$  dérivables en tout point de  $U$ . Elles forment une algèbre.

### 1.4.2 Conditions de Cauchy Riemann

On note  $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  où  $u$  correspond à la partie réelle de  $f$  et  $v$  à la partie imaginaire. Alors  $f$  est holomorphe si et seulement si  $(x, y) \mapsto (u, v)$  est différentiable et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{équations de Cauchy Riemann.}$$

## 1.5 Fonctions analytiques et Séries entières

### 1.5.1 Définition

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  est analytique si en tout point  $z_0 \in U$  il existe  $r > 0$  tel que  $D(z_0, r) \subset U$  et  $f$  est développable en série entière sur  $D(z_0, r)$ . c'est-à-dire  $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  converge pour tout  $z \in D(z_0, r)$ .

### 1.5.2 Rayon de convergence

Théorème de Hadamard.

### 1.5.3 Propriétés

Somme et produit de séries entières. Théorème de dérivation et de primitivation d'une série entière.

Exemples. Nous avons donc que les sommes de séries entières définissent des fonctions holomorphes sur leur disque ouvert de convergence.

### 1.5.4 Fonctions spéciales

#### Fonction exponentielle

Définition de la fonction exponentielle complexe de rayon de convergence infini, de dérivée exp. Formule  $\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v)$ . Définition de  $\cosh z, \sinh z; \cos z, \sin z$ .

#### Fonction Logarithme

On donne une détermination du logarithme (fonction réciproque de exp) dans  $\Omega_t = \mathbf{C} \setminus (e^{it}R_-)$  par  $\text{Log}_t(z) = \ln|z| + i \arg_t(z)$  où  $\arg_t$  est la détermination de l'argument comprise dans  $]t - \pi, t + \pi[$ . La détermination est dite principale si  $t = 0$  et noté Log. La fonction Log est holomorphe et de dérivée  $1/z$ .

#### Fonction puissance

On définit  $z^a$  par  $\exp(a \text{Log}_t z)$  dans  $\Omega_t$ .

### 1.5.5 Autres exemples

Ainsi les fonctions exp, cos, sin, ch, sh définissent des fonctions holomorphes sur  $\mathbf{C}$  tout entier (i.e. des fonctions entières). On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{tg} &= \frac{\sin}{\cos} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}(\pi/2 + \pi\mathbf{Z})), & \text{cotg} &= \frac{\cos}{\sin} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}\pi\mathbf{Z}), \\ \text{th} &= \frac{\text{sh}}{\text{ch}} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}(i\pi/2 + i\pi\mathbf{Z})), & \text{coth} &= \frac{\text{ch}}{\text{sh}} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}i\pi\mathbf{Z}), \end{aligned}$$

et de même les déterminations  $\log_{\theta_0}$  et  $z \mapsto z^\alpha$  du logarithme et des fonctions puissances sont holomorphes sur  $\Omega_{\theta_0}$ .

### 1.5.6 Théorèmes de prolongement analytique et zéros isolés

**Théorème de prolongement analytique :**

Soit  $U$  un ouvert connexe,  $f$  analytique de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in U$ . On a équivalence entre :

- $f$  est nulle sur  $D(z_0, )$
- $f^{(n)}(z_0) = 0$  pour tout  $n \geq 0$
- $f = 0$  sur  $U$ .